

# 高中数学核心素养的培养、评价与教学实施

史宁中

**摘要：**数学核心素养的本质，是描述一个人经过数学教育后应当具有的数学特质，大体上可以归纳为：会用数学的眼光观察世界，会用数学的思维思考世界，会用数学的语言表达世界。学生获取数学核心素养依赖于经验的积累，因此在教学设计中，要抓住数学内容的本质、知道学生的认知规律，创设合适的情境、提出合适的问题，启发学生独立思考、鼓励学生与他人交流，在掌握知识技能的同时理解数学的本质、形成和发展数学核心素养。评价应当与教学融为一体，在考查知识技能的同时关注学生数学核心素养的达成，应当实现评价形式和命题形式的转变。

**关键词：**数学核心素养；数学眼光；数学思维；数学语言；教学活动；评价

正在修订的普通高中数学课程标准，着重提出要培养学生的数学核心素养。那么，提出核心素养的背景是什么？要达到的教育目标是什么？什么是核心素养？什么是数学核心素养？数学核心素养与“四基”的关系是什么？为了培养学生的数学核心素养，在日常的教学活动中，教学设计与实施应当作怎样的调整？能够通过测试考查学生数学核心素养达成水平吗？评价方式和命题方式要不要作相应的调整？

## 一、提出数学核心素养的背景

(一) 修订课程标准突出学科核心素养的依据

为了落实党的十八大提出的立德树人这一根本任务，教育部于2014年发布了《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》，明确要求：“研究制定学生发展核心素养体系和学业质量标准”，并且对这次修订高中课程标准提出具体要求，就是突出学科核心素养，不仅要研制出本学科的核心素养是什么，还要基于学科核心素养

提出教学建议、评价建议，制定学业质量标准。总之，要用学科核心素养统领课程标准的修订。

为此，教育部成立了一个由北京师范大学牵头的小组，专门研究核心素养是什么，于2016年9月13日公布了研究结果，将学生核心素养定义为“学生应具备的，能够适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力”，并基于社会参与、自主发展、文化基础三个方面，提出六个大条目十八个具体指标。这就是制定学科核心素养的基本依据。

## (二) 核心素养以及数学核心素养的含义

作为教育目标的核心素养，是1997年由经济合作与发展组织(OECD)最先提出来的，后来联合国教科文组织、欧盟以及美国等国家都开始研究核心素养。

我认为提出核心素养的目的，是要把以人为本的教育理念落到实处，要把教育目标落实到人，要对培养的人进行描述。具体来说，核心素养大概可以这样描述：后天形成的、与特定情境有关的、通过人的行为表现出来的知识、能力与态度，涉及人与社会、

人与自己、人与工具三个方面。因此可以认为，核心素养是可以后天教育的，是在特定情境中表现出来的，是可以观察和考核的，主要包括知识、能力和态度。而人与社会、人与自己、人与工具这三个方面与北京师范大学研究小组的结论基本一致。

基于上面的原则，我们需要描述，通过高中阶段的数学教育，培养出来的人是什么样的。数学是基础教育阶段最为重要的学科之一，通过基础教育阶段的数学教育，不管接受教育的人将来从事的工作是否与数学有关，终极培养目标都可以描述为：会用数学的眼光观察现实世界；会用数学的思维思考现实世界；会用数学的语言表达现实世界。本质上，这“三会”就是数学核心素养；也就是说，这“三会”是超越具体数学内容的数学教学目标。

### （三）数学核心素养的具体内容

上面提到的“三会”过于宽泛，为了使教师能够在数学教育的过程中有机融入数学核心素养，需要把“三会”具体化，赋予内涵。

数学的眼光是什么呢？就是数学抽象。数学的研究源于对现实世界的抽象，通过抽象得到数学的研究对象，基于抽象结构，通过符号运算、形式推理、模型构建等数学方法，理解和表达现实世界中事物的本质、关系和规律。正是因为有了数学抽象，才形成了数学的第一个基本特征，就是数学的一般性。当然，与数学抽象关系很密切的是直观想象，直观想象是实现数学抽象的思维基础，因此在高中数学阶段，也把直观想象作为核心素养的一个要素提出。

数学的思维是什么呢？就是逻辑推理。数学的发展主要依赖的是逻辑推理，通过逻辑推理得到数学的结论，也就是数学命题。所谓推理就是从命题判断到命题判断的思维过程，其中的命题是指可供判断正确或者错误的陈述句；所谓逻辑推理，就是从一些前提或者事实出发，依据一定的规则得到或者

验证命题的思维过程。正是因为有了逻辑推理，才形成了数学的第二个基本特征，就是数学的严谨性。虽然数学运算属于逻辑推理，但高中阶段数学运算很重要，因此也把数学运算作为核心素养的一个要素提出。

数学的语言是什么呢？就是数学模型。数学模型构建了数学与现实世界的桥梁。在现代社会，几乎所有的学科在科学化过程中都要使用数学的语言，除了数学符号的表达之外，主要是通过建立数学模型刻画研究对象的性质、关系和规律。正是因为有了数学建模，才形成了数学的第三个基本特征，就是数学应用的广泛性。因为在大数据时代，数据分析变得越来越重要，逐渐形成了一种新的数学语言，所以也把数据分析作为核心素养的一个要素提出。

我想强调的是，上面所说的数学的三个基本特征，是全世界几代数学家的共识。这样，高中阶段的数学核心素养就包括六个要素，其中最为重要的有三个，这就是：抽象、推理和模型。或许可以设想：这三个要素应当贯穿基础教育阶段数学教育的全过程，甚至可以延伸到大学，延伸到研究生阶段的数学教育；这三个要素是构成数学三个基本特征的思维基础；这三个要素的哲学思考就是前面所说的“三会”，是对数学教育最终要培养什么样的人的描述。

## 二、如何培养学生的数学核心素养

传统数学教育的“双基”是指基础知识和基本技能，要求基础知识扎实，基本技能熟练。2001年开始的课程改革，在传统“双基”这个一维目标的基础上提出三维目标，这就是：知识技能、过程方法、情感态度价值观。这里所说的情感态度价值观就是现在核心素养所说的态度或者必备品格。

但是，三维目标中所说的“过程方法”没有成为目标，这是因为在描述“过程方法”时使用的行为动词是“经历”“体验”

“探索”，并没有说明通过这些“过程”让学生获得什么。为此，在修订义务教育数学课程标准时，把“过程”目标表述为：通过学生参与其中的数学教学活动过程，让学生感悟数学的基本思想，积累数学思维和实践的基本经验。这就把传统数学教育的“双基”发展为“四基”，并且强调：“四基”的提出是在传统的“双基”的前提下，加上了基本思想和基本活动经验，目的是通过数学的学习，学生不仅把数学作为一种技术和手段，还要学会思考，逐步具有抽象的能力和逻辑推理能力。

进一步，为了明确什么是数学的基本思想，建立了两个判断标准，这就是：数学产生和发展必须依赖的思想；学习过数学的人应当具备的基本思维品质。基于这两个判断标准，强调数学的基本思想包括三个要素：抽象、推理和模型。由此可以看到，现在所说的数学核心素养与传统数学教育是一脉相承的，只不过是把数学核心素养放在了一个更加突出的位置。

为了实现这样的教育目标，在数学教育中至少应当遵循两个原则，一个是把握数学知识的本质，另一个是设计并且实施合理的教学活动。

既然数学核心素养是“四基”的继承和发展，那么“四基”就是发展学生数学核心素养的有效载体。强调“四基”，就要把握数学知识的本质，在数学教学活动中，让学生在掌握知识技能的同时理解知识的本质，感悟知识所蕴含的数学基本思想，积累数学思维和实践的经验，在这个基础上促使学生形成和发展数学核心素养。

之所以要设计并且实施合适的教学活动，是因为学生数学核心素养的形成和发展，本质上是学生自己“悟”出来的，是学生通过自己的独立思考，以及和他人的讨论与反思，逐渐养成的一种思维习惯。要做到这一点，就必须设计并且实施合适的教学活

动，能够启发学生独立思考，鼓励学生与教师交流，与其他同学交流。也就是说，完全依赖教师的讲授是不可行的。

比如，关于函数概念的教学。在高中阶段的数学教学中，函数是非常重要的内容，这次修订的高中数学课程标准内容主线主要包括三个主题，其中一个主题就是函数。

函数教学首先遇到的问题是，学生在初中已经学过函数的概念，是用变量关系讲授的，高中又要通过对应关系重新定义函数，这是为什么呢？重新定义是必要的吗？在过去的数学教育中，教科书没有论及这个问题，因此在教学过程中也不涉及这个问题，于是给学生留下这样的认识：函数有两个定义，这两个定义是有区别的，都是应当记忆的。可以看到，这样的教学活动无法让学生理解函数概念的本质，更无法让学生感悟数学的基本思想，形成和发展数学核心素养。

事实上，对于函数的概念，对应关系实现了更高层次的抽象。在变量关系的函数定义中，我们仍然可以感知物理背景：一个量变化另一个量也随之变化。甚至可以通过表达式来感知这个变化。因为有具体的背景，这样定义的函数是直观的，在初中阶段也是合适的。但是，凡是具体的就必然会出现特例，比如，通于变量关系定义的函数判断不了这样的问题：一个函数是  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ ，另一个函数是  $g(x) = 1$ ，这两个函数的表达式不同，就是两个不同的函数吗？通过对应关系的函数定义就可以对这个问题进行判断了：这两个函数是同一个函数，因为定义域相同，对应关系相同。通过这样的教学，学生可以知道用对应关系重新定义函数是必要的，从而感悟函数的本质是对应关系，理解研究函数的性质必须注意函数的定义域。通过这个过程，可以感悟数学抽象的层次性，知道数学抽象使得数学概念具有了一般性。这就是基于“四基”的教学，是培养学生数学核心素养的教学。

进一步，为什么在定义中要求实数集到实数集的对应呢？过去高中数学教学也不论及这个问题，但这个问题是本质的。如果按照变量关系定义函数，当自变量  $x$  是角度时， $\sin x$  是函数，但这时的角度不是实数，无法进行形如  $x + \sin x$  之类的计算。那么，应当如何处理呢？事实上，作为函数的三角函数，自变量就不能再是常规定义的角度，必须是实数。这就要求用长度刻画角的大小，比如用角所对应的单位圆的弧长来刻画角的大小，这就是弧度制。特别是，因为三角函数能够清晰地表达周期现象，那么三角函数的自变量就不仅仅是角度了，可以是时间，也可以是频率等。

更进一步，如果不用实数与实数的对应关系，有些函数就很难表达清楚。比如狄利克雷函数。此外，在高中数学中还要接触一个重要极限，这就是  $\sin x$  与自变量  $x$  之比，当自变量趋于 0 时，极限为 1。这时的函数必须是实数与实数的对应。因此，在函数概念的教学中突出数学的本质，才能让学生感悟数学的思想，形成和发展数学核心素养。

无论是教材编写还是教学的设计与实施，都应当充分关注上面所说的两个基本原则。

那么，基于这两个原则的教学设计是怎样的呢？

首先要改变的是教学设计的思路。不能像传统的数学教学那样，按照每一节课或每一个知识点进行教学设计，而应当把一些具有逻辑联系的知识点放在一起进行整体设计。这是因为，对于数学的内容，很难通过一节课或一个知识点就把数学的本质表述清楚，比如，上面说到的函数的概念。无论把这个整体称为“单元”还是“主题”，总之，都要把这些内容融为一体进行教学设计，并且付诸实施，这样才能在关注知识技能的同时，认真思考数学的本质、体现的数学思想，培养学生的数学核心素养。

其次，教学的设计与实施，要特别重视

情境与问题。前面谈到，核心素养是在特定情境中表现出来的知识、能力和态度，那么，只有通过合适的情境才有利于学生感悟、理解、形成和发展核心素养。设计情境与问题的目的是启发学生思考，设计情境与问题的根基是数学内容的本质。

情境与问题是多样的、多层次的。情境可以包括：现实情境、数学情境、科学情境；每种情境可以分为：熟悉的情境、关联的情境、综合的情境。问题是指情境中的问题，从学生认识的角度可以分为：简单的问题、较为复杂的问题、复杂的问题，从学生思维的角度可以分为：模仿的问题、联系的问题、创造的问题，等等。数学核心素养在学生与情境、问题的有效互动中得到提升。因此，在数学教学活动中，教师应当结合教学任务及其蕴含的数学核心素养，设计合适的情境与问题，引导学生用数学的眼光观察现象、发现问题，引导学生用数学的语言描述背景、表达问题，引导学生用数学的思维分析问题、解决问题。在问题解决的过程中，促使学生理解数学内容的本质，促进学生数学核心素养的形成和发展。

通过上面的讨论可以看到，情境与问题是联系在一起的，一个情境是否合适并不取决于情境本身，而在于所提出的问题能否揭示数学的本质。当然，可以设计一个情境，让学生在情境中自己提出问题。在这种情况下，教师的引导和启发就更加重要了。设计合适的教学情境、提出合适的数学问题是具有挑战性的，这为广大中小学教师教学活动的实践与创新提供了平台。

虽然教无定法，但是教学必须有原则，这个原则就是以学生发展为本，更具体地说就是要启发学生思考，引导学生学会学习。在过去的教学活动中，教师可能更关心如何教，但基于“四基”的，或者说基于数学核心素养的教学，更多地需要关心学生如何学，需要知道学生的认知水平和认知过程。

综合上面的论述,大概可以把一个理想的教学过程描述如下:把握数学知识的本质、把握学生认知的过程;创设合适的教学情境、提出合适的数学问题;启发学生思考、鼓励学生与他人交流;让学生在掌握知识技能的同时,理解数学知识的本质;感悟数学的思想、形成和发展数学核心素养。

我想再次强调的是,上面说的五个环节不是教学模式,也不要求在每一堂课上都实现,而是在进行整体教学设计时应当认真考虑的,是在进行整体教学实施时应当实践的。数学核心素养的养成是学生日积月累的结果,因此需要整体设计,分步实施。

### 三、如何基于数学核心素养进行评价

评价是数学教学的指挥棒,如果数学教学要突出数学核心素养,那么评价是不是也应当有所改变呢?这个问题非常重要。如果评价不变,教学目标和教学方法的改变是很难实现的,再好的教育理念也无法得到落实。在很多情况下,评价就决定了教学。一般来说,评价涉及两个方面,一个方面是评价的方式,另一个方面是命题的形式。

评价方式要改变单纯依赖一张试卷的状况。对于日常评价,除了期末考试的成绩以外,还可以参考其他内容进行评价。比如,期中考试的成绩、日常作业完成的情况、日常教学活动中的表现,特别是修订的高中课程标准中还设计了“数学建模活动和数学探究活动”的主题,要求学生通过研究报告或者以小论文的形式完成,这些都可以作为日常评价的依据。对于高考评价,关键的是改变高校的招生办法,除了高考的成绩以外,还应当允许高校在招生时,特别是在自主招生时,参考学生其他信息,比如,参考放在学生学习档案中的相关材料:学生参加社会活动的评价、学生完成的研究报告或者小论文、选修Ⅱ中各类课程(包括艺术类课程、大学先修课程)的成绩、高中奥数的成绩

等。这个转变是比较困难的,但无论如何要完成转变的第一步,这就是学生的学习档案中要有丰富的材料,以供高校录取时参考。

关于命题的形式,知识技能的考核还是重要的,因为前面已经谈到,“四基”是培养数学核心素养的基础。但不要过分强调解题的速度。现在高中学生要用几乎一年的时间准备高考,准备的主要形式是高强度的训练,主要目的就是熟能生巧,希望学生能够“一看就会、一做就对”。事实上,数学是需要思考的,不能单纯通过解题速度的快慢来评价一个学生学习的好坏。基于目前的状况,希望在不增加题量的前提下,适当延长考试的时间。

关于命题的设计,我想至少应当实现两个转变:一个是关注学生数学核心素养的达成;另一个是考查学生的思维能力。

关于第一个转变,过去命题设计主要是关注知识点,关注学生对某一个知识点掌握的程度或应用能力,未来的命题设计还要进一步关注学生数学核心素养的达成。因此在命题设计时,在把握数学知识本质的基础上,可以从数学知识出发考虑所蕴含的数学核心素养,或者反过来,从数学核心素养出发考虑相应的数学知识,把数学知识与数学核心素养融为一体。

比如,如果从数学抽象这个数学核心素养出发设计命题,就可以设计如何理解两点间距离的问题。这是因为:就数学本质而言,距离是“几何与代数”这个主题最基本、最重要的概念;就思维品质而言,理解距离的概念需要直观想象,更需要高度的抽象。

可以遵循下面的思路设计命题。首先,距离是一种度量,因此这样的度量表达必须是非负实数;凭借直观想象,如果两个点合并为一个点,那么距离为零,因此单点的度量应当为0;同样是凭借直观想象,如果两点间距离越远,那么度量越大,因此度量的三角不等式必须成立。这样就把握了距离这

个概念的数学本质。其次，教科书中讲授的是欧几里得距离，这样的度量基于坐标差平方之和。那么根据距离的本质，类比如几里得距离，可以思考这样的问题：基于坐标差绝对值之和，是不是可以定义一种新的距离呢？不言而喻，判断正确与否的准则就是距离概念的本质。最后，由浅入深地设计命题。比如，先考虑基于数轴的一维空间的距离，再考虑基于平面直角坐标系的二维空间的距离，还可以考虑三维空间或者更高维的空间，甚至可以考虑非直角的坐标系的情况，等等。这样进行命题设计体现了层次性，能够引发学生深入思考。这样的命题设计就是一种转变，既关注了数学的本质，也关注了数学核心素养。

关于第二个转变，在数学教育中应当注意到这样一个事实，这就是，一个人的思维能力与所学知识点之间的关系不是充分必要的。因此，考查一个学生的思维能力可以跳出知识点的束缚，主要考查学生的思维过程是否有逻辑，这样的考查可以通过开放题实现。所谓的开放题是说，问题的答案不是给定的，是需要学生自己想象的，在解答的过程中，需要说出想象的理由是什么。这样的考核与“逻辑推理”数学核心素养的关系密切，本质上是考查学生的“三会”，即数学的眼光、数学的思维、数学的表达。开放题的判定应当遵循一个基本原则，可以称为“满意原则”：如果学生的思维过程与得到的结论是一致的，就应该满意，就可以得到满分；如果学生思考得更加深刻可以加分。

开放题的答案是不确定的，因此不可能有标准答案，答案正确与否需要根据学生的解答进行判断，判断的基本准则就是学生的思维过程与得到的结论是否一致。这个一致性就体现了思维过程的传递性，传递性是逻辑推理的基本要求。当然，这样的试题给教师的评卷增加了一定的难度，但是为了培养学生的思维能力，为了发展学生的核心素

养，应当设计这样的开放题。为了更好地说明什么是开放题，什么是满意原则，正在修订的普通高中数学课程标准的附录中给出了一定数量的例题，供教材编写、教师教学、命题设计参考。最后需要特别强调的是，这样的试题应当有，但不能多，一张试卷最多设计一道这样的开放题。

#### 四、结束语

以上谈了很多有关课程改革的教育理念和做法，似乎非常庞杂，但是，总体目标是明确的，这就是要把以人为本的教育理念落到实处。或者说，就是要把立德树人的根本任务落到实处；学科目标是具体的，除了共性的核心素养之外，描述清楚数学教育最终要培养什么样的人，这就是文中所说的“三会”。操作思路是清晰的，就是把“三会”用数学术语予以表达，形成数学核心素养的具体表述，建立数学核心素养与数学教学内容的关联。实施路径是可行的，这就是：把握数学的本质；创设合适的教学情境、提出合适的数学问题；启发学生独立思考、鼓励学生与他人交流；使学生在掌握知识技能的同时，感悟数学本质；积累数学思维和实践的经验、形成和发展数学核心素养。

无论进行怎样的课程改革，如果要用一句话描述数学教育的根本，那就是培养学生的数学直观，因为数学的结论是“看”出来的，不是“证”出来的，依赖的是数学直观，这是“三会”的现实表现。数学直观是一个人长期进行数学思维形成的，是逐渐养成的一种思维习惯，这个思维习惯日积月累就形成了数学素养。在这个意义上，所有的学科都应当把培养学科的直观作为这个学科的终极培养目标。

（作者系东北师范大学数学与统计学院教授，统计学博士生导师，数学课程与教学论博士生导师，普通高中数学课程标准修订组长。）

（责任编辑：李冰）