



## 聚焦“数学核心素养”

——“学科视角下的核心素养与整合课程”系列之三

□ 郑毓信

【摘要】这是国际上相关研究给予我们的重要启示：聚焦“学科核心素养”并不意味着局限于狭隘的“学科性观点”，而是应当很好地去处理整体性教育目标与学科教学之间的辩证关系，包括对研究工作的基本立场与具体途径等作出自觉反思。进而，如果说“数学地看待世界、解决问题”即可被看成“数学素养”的显性表现，那么我们应当通过数学教学帮助学生学会思维，也即能够逐步学会想得更清晰、更全面、更深刻、更合理。

【关键词】数学核心素养 学会思维

由系列文章的前两篇可以看出，我国数学教育工作者在当前面临的一个重要任务，即如何能够依据总体性的教育思想，特别是“走向核心素养”的相关理论，对“数学核心素养”的具体含义作出分析与论述。作为这方面工作的有益借鉴，本文将首先对国际上的相关研究作出简要介绍和分析；然后借助一个教学实例提出笔者在这方面的一些具体想法，希望能起到一定的促进作用。

### 一、国际上的相关研究

之所以要对国际上的相关研究作出简要介绍和分析，主要是以此为背景我们可以更好地确定自身研究工作的基本立场和具体途径，从而实现更大的自觉性，并切实避免各种可能的片面性，乃至对实际教学教育工作起到误导的作用。

目前在国内，我们看到的主要是由“核心素养”到“数学核心素养”的扩展，且“数学核心素养”似乎是一个全新的概念，但如果将视野

扩展到国际数学教育界，则并非如此。因为尽管相关研究可能具有不同的背景或目的，但国际上一些数学教育家和数学家早就提出了“数学素养”这样一个概念，一些人士还因此而专门创造了“numeracy”<sup>1</sup>这样一个词语（它是由“literacy（一般性素养）”演变而来的），希望能清楚地表达这样一种思想：正如人文学科的主要功能是提高学生的“一般性素养”，数学教育也应致力于提高学生的“数学素养”。

当然，国际数学教育界在这方面所使用的词语并非完全一致。除去已提及的“numeracy”，也有学者更加倾向于使用“mathematical literacy”这样一个词语；另外，还有学者提到了“quantitative literacy”和“critical numeracy”等概念，从而似乎就与国内所说的“数学核心素养”表现出了更高的一致性。再者，即使就同一词语的使用而言，人们往往也赋予了多种不同的含义。例如，在一篇直接题名为“mathematical literacy”的综合性文章中，作者就具体地提到了这一概念的五种不同含义<sup>2</sup>。从更为

1 有文献提及，“numeracy”这一词语的最早使用可以追溯到1959年的《Crowther Report》。

2 E. Jablonka. Mathematical literacy. 载 A. Bishop 等主编，Second International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, 2003: 75 ~ 102.

深入的角度看,所说的不完全一致集中体现了不同的研究背景或目的,即“如果不是同时——自觉或不自觉地——去强调某种特定的社会实践,对于 mathematical literacy 某种含义的提倡就是不可能的”<sup>1</sup>。

然而,从总体上看,相关研究应当说也有一些明显的共同点。

第一,就当前而言,人们对于“numeracy”和“mathematical literacy”这两个词语基本上是不加区分的,即事实上将它们看成了同义词(也正因此,我们在以下将统一译为“数学素养”)。另外,如果说在早期“数学素养”曾被等同于某些具体的数学知识和技能,那么现今人们所采取的就是一种更加广泛的视角,即同时覆盖了知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观等多个不同的成分或维度。

第二,尽管存在多种不同的研究立场,但对于社会进步与个人发展的高度关注可被看成所有这些研究的又一共同特点。“一方面是社会的视角:数学素养主要涉及社会—经济的变化与社会的技术进步,它应当与此相适应并促进社会的整体发展;另一方面数学素养又与个人的生活密切相关,也即应当聚焦于个人。”<sup>2</sup>

例如,尽管以下论述的直接主题是“数学教育目标”而非“数学核心素养”,但其分析思路显然表现出对于社会进步与个人发展的高度关注,即在很大程度上可以被看成超越狭隘的“学科性观点”而达到了更高的层次:

作为数学教育目标的具体论述,由美国数学教师理事会制订的《学校数学课程与评价的标准》——这是新一轮数学课程改革(“课标运动”)最为重要的指导性文件之一,甚至被誉为

“开拓了数学教育改革的一个新阶段”——首先提出了如下四个关于数学教育的“社会目标”: (1) 具有良好数学素养的劳动者; (2) 终身学习的能力; (3) 平等的教育; (4) 明智的选民。然后以此为基础,这一文件又进一步提出了如下五个具体的数学教育目标: (1) 学会认识数学的价值; (2) 对自己的数学能力具有信心; (3) 具有数学地解决问题的能力; (4) 学会数学地交流; (5) 学会数学地推理。<sup>3</sup>

更为一般地说,这也正是国际上关于“数学素养”的研究何以常常伴随以下一些词语的主要原因: 数学教育目标、大众数学、良好的数学教育,等等。

当然,在明确肯定上述共同点的同时,我们又应清楚地看到相关研究之间所存在的重要区别。例如,在笔者看来,以下的对立就直接涉及研究工作的基本立场。对一部分学者而言,提倡“数学素养”就意味着对数学教育提出了更高的要求,特别是,不应简单地去提倡“大众数学”,而是应当更为明确地提倡“数学上普遍的高标准”: 我们不仅应当在数学的知识与技能方面对学生提出更高的要求,而且应帮助学生学会数学地思维,学会数学地观察世界、解决问题,包括逐步养成数学的态度和数学的理性精神等。

又如,美国数学教育工作者在强调数学教育改革的紧迫性时所采取的基本立场: “为了国际竞争的胜利和保持科学的领先地位,美国必须迅速改进自己的数学教育……我们再也不能坐视这样的情况发生,即我们的儿童不能通过学校教育从数学上为21世纪做好准备。挑战是明显的,机会就在眼前,是行动的时候了。”<sup>4</sup>

1 E. Jablonka. Mathematical literacy. 载 A. Bishop 等主编, Second International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, 2003: 75.

2 G. Fitzsimons 等. Adult and Mathematics (Adult Numeracy). 载 A. Bishop 等主编, International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, 1996: 757.

3 NCTM. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989: 3 ~ 6.

4 NCTM. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989: 96.

与“数学上普遍的高标准”相对立,在现实中也有一些学者特别强调这样一个立场,即认为“数学素养”的界定可以被看成为那些人士——他们并不指望将来从事专业的数学工作或是其他需要用到很多数学的高科技工作——提供了关于数学教育的最低标准。例如,这事实上就是现实中关于“数学素养”的研究何以往往与“数学与成人”这一论题密切相关的主要原因;进而,这又正是“数学与成人”研究最为重要的一个主题,即什么应当被看成现代社会合格公民所必须具备的“数学素养”。

第三,应当强调的是,尽管以上主要是针对国际上关于“数学素养”的理论研究进行了介绍和分析,但相关的论述在很大程度上同样适用于国内关于“核心素养”的研究。这也就是指,我们应以此为借鉴,对已有工作做出认真总结与反思,包括必要的调整与改进。事实上,这也正是国外相关研究的一个重要出发点,即对于数学教育现状(乃至整体性文化环境)的批评与反思。

另外,如果说国内目前所采取的主要是由一般性的“核心素养”逐步扩展到“数学核心素养”(以及其他各个“学科核心素养”)这样一条研究途径,那么国际上似乎更多地采取了以数学教育作为改革“领跑者”的做法,从而在现实中经常可以看到的就是由数学教育改革向整体性教育改革(以及其他各个学科教育的改革)的扩展。当然,对于这样两种研究途径,我们不应做出孰优孰劣的简单区分,但在笔者看来,我们确有必要首先在某个学科就“学科核心素养”这一论题做出试点,然后在认真总结的基础上才可在更大范围作出推广和普及。当然,聚焦“学科核心素养”并不意味着相关研究必定局限于狭隘的“学科性观点”,也即唯一地从数学或数学教育的视角去进行分析,恰恰相反,这里的关键同样在于我们应当很好地去处理整体性教育目标与学科教学之间的辩证关系,特别是,我们应认真地去研究学科教育

如何才能更好地承担起自己的社会责任,也即能够更为有效地促进社会的进步与学生个体的发展。

总之,这正是我们在研究“数学核心素养”时所应坚持的一个基本立场,即应当高度重视从国外的已有工作中吸取有益的成分,包括研究的基本立场、具体途径与概念的具体内涵,等等。

## 二、“数学素养”之我见

我们不能满足于纯理论的研究而完全不顾及相关研究的现实意义,乃至唯一地表现为由理论到实践(以及由一般到特殊)的单向运动,忽视了理论与实践(以及一般与特殊)之间的辩证关系,特别是,理论研究者应始终保持对于实际教学教育活动的高度关注。另外,在笔者看来,一线教师应当特别重视“理论的实践性解读”,因为密切联系教学实践不仅有助于更好地理解各种抽象的理论,而且只有密切联系自己的教学实践去进行解读,才能更好地吸取其中的有益成分,从而真正改进教学。

以下就以笔者新近聆听的“生活中的比”的教学为例,提出自己关于“数学素养”的一些想法。

这是著名特级教师俞正强在一次教学观摩会上展示的一堂课。从现场的调查情况看,这一内容的教学应当说十分必要——尽管还没有正式教过“比的认识”,但全班除3个人外都已经通过其他渠道学习了“比”这样一个概念;然而,其中的大多数人却不知道这一内容在现实中究竟有什么用,或者说,“数学中的比”与日常生活究竟有什么联系。

当时的教学活动是这样的——

在对“比”的概念作了简单回顾以后,任课教师首先向学生提出了这样一个问题:你在生活中有没有遇到过“比”,有哪些?当然,学生给出了各种各样的回答,如药水中药物与水的比,洗涤剂的浓度,足球比赛中的比,等等。由

于这些实例显然可以被归为两个不同的类别(我们可以将“药水中药物与水的比”与“足球比赛中的比”看成两者的典型代表),教师将学生的注意力引向了以下的问题:这两种“比”有什么不一样?

学生在此又一次地给出了多种不同的解答,如前者是不可变(固定)的,并可适当地简化;后者则是可变的,不可简化的,等等。教师通过全班的交流与必要的引导,最终引出了这样一个结论:前者就是“数学中的比”,它所反映的是两个量之间的固定(倍数)关系。

笔者在此并不试图对上述教学活动做出全面评价,而是主要集中于这样一个问题:从“走向(数学)核心素养”这一角度去分析,我们应当如何去评价上述的教学活动?或者说,“走向(数学)核心素养”对于我们改进这一内容的教学究竟有哪些新的启示或教益?更为重要的是,我们又如何能够以此为背景提炼出关于什么是“数学核心素养”的一些具体认识?

具体地说,笔者以为,这或许可以被看成这一教学活动的最低标准,即我们应当帮助所有学生很好地区分所说的两种不同类型,特别是,不应将“足球比赛中的比”与其他一些类似的现象错误地归为“数学中的比”;另外,我们当然也应帮助学生清楚地认识“数学中的比”与现实生活的联系,包括逐步地学会将相关的数学知识应用于日常生活。

但是,如果我们提倡的是“数学上普遍的高标准”,特别是,通过教学帮助学生学会数学地思维,学会数学地观察世界、解决问题,这对于我们改进教学又有哪些启示呢?

笔者以为,我们首先应清楚地认识到这样一点:这一内容的教学不应停留于“生活中的比”,而是应当帮助学生清楚地认识“生活中的比”与“数学中的比”之间的关系,特别是两者的不同之处,如日常语言的含糊性、歧义性,数

学语言的精确性、一义性,等等;更为一般地说,我们应当帮助学生初步地感受这样一个基本的事实:数学(概念)既源于数学,又高于数学。显然,相对于简单地引出“‘足球比赛中的比’并非‘数学中的比’”这样一个结论而言,上述认识意味着由结论向过程、向思维方法的重要过渡。

应当指出的是,这里所说的“数学思维”直接关系到了思维的深度。具体地说,数学中之所以要引入“比”这样一个概念,主要就是体现了这样一个研究视角:我们在此所关注的主要是两个量之间的关系而非各个量的大小<sup>1</sup>。进而,也就可以更为深入地去认识上面所提到的“两种比”之间的联系与区别:与“足球比赛中的比”相类似,“药物与水的比”同样涉及量的变化,但后者所关注的主要是变化中的不变因素,即尽管“药物”与“水”量的大小都可能发生变化,但它们的关系却保持不变,从而也就与“足球比赛中的比”有很大的不同。

由以下的分析,相信读者可以更好地理解上面所提及的“生活视角”与“数学视角”之间所存在的重要区别。尽管“比”这一词语最为基本的含义直接涉及两个对象之间的比较,但日常生活中人们所关注的主要是两者的优劣、强弱等,如足球比赛中两支球队的输赢;与此相对照,数学的视角则完全集中于两者的量性关系,特别是变化中的不变因素,以及我们如何能从更为广泛的角度去理解相应的数学概念的现实意义。例如,从运动的角度去分析,比的研究显然直接关系到运动的匀速性;另外,从形的角度去分析,比的确定性则意味着图形的相似性,等等。最后,由日常生活向数学的过渡也常常意味着语言的重要变化。例如,人们往往会借助以下一些词语来形容足球比赛的结果:小胜、大胜、险胜、狂胜,尽管十分

(下转第74页)

1 郑毓信. 概念教学应当注意的一些问题[J]. 小学教学设计, 2014(5)(6). 本文已被收入郑毓信. 小学数学概念与思维教学(“郑毓信数学教育论丛”之四)[M]. 南京:江苏教育出版社, 2014.

## 五

要想有所输出,还需有所输入;要想抽象提升,还需停顿驻足。

回马枪是对学生学习机理的洞悉,是对教学节奏的把握,在该前进的时候急速前进,在该驻足的时候立马停留。

回马枪是对学生资源的机智反馈,学生的

想法总有其价值,未必要及时反馈,放一放,等一等,起死回生,事半功倍!

回马枪更是对教师教学素养的考验,只有对教学的结构有整体的视野,对学生的基础情况有熟悉的了解,同时对学生的生成有敏锐的判断力,才能把握好出手的时机,四两拨千斤。

回马枪不容易,却可以让你以梦为马,奔向远方。

(上接第11页)

形象,但同时有很大的含糊性,或者说主要可被看成“定性的”研究;与此相对照,“比值”的引入就为人们为两者关系作出精确的描述提供了必要的概念工具。

以下就以上述实例为基础,引出关于“数学核心素养”的一些具体想法。

首先,如果我们坚持“数学上普遍的高标准”,这或许就可被看成“数学核心素养”最为基本的一个含义,即我们应当学会“数学地看待世界,发现问题,表述问题,分析问题,解决问题”。当然,从专业的角度看,我们又应进一步去研究如何才能帮助学生很好地实现所说的这一标准,即应当将这一标准适当地予以细化。在笔者看来,尽管荷兰著名数学家、数学教育家弗赖登塔尔的以下论述是就所谓的“数学态度”而言的,但这仍然可以被看成为我们究竟应当如何去把握“数学核心素养”的具体内涵提供了重要启示:(1)发展语言;(2)视角的转变;(3)精确度;(4)数学化;(5)反思<sup>1</sup>。

例如,由先前的讨论我们已经知道,所谓的“发展语言”并非仅仅是指由定性的刻画转向定量的描述,也意味着我们应当根据需要与

情境积极地去引入一些新的概念,如“比”“函数”“概率”等。另外,如果说“数学化”可被看成“视角的转变”最为基本的一个含义,即我们应当学会由“日常视角”转向“数学视角”,那么按照弗赖登塔尔的解释,我们应根据环境与需要,灵活地采取各种不同的研究视角和方法,如用代数方法去解决几何问题,或是用几何图形形象地去表示代数问题,等等。

其次,应当强调的是,如果说“数学地看待世界”即可被看成“数学素养”的显性表现,那么以下或许就应被看成后者的真正内核所在,即我们如何能够通过数学教学帮助学生学会思维(“系列之一”中已经明确指出,对此我们不应简单地等同于“帮助学生学会数学地思维”),这并非是指想得更快速一点、如何能够与众不同,而是指我们应当逐步学会想得更清晰、更全面、更深刻、更合理<sup>2</sup>。因为,归根结底地说,“我们并非是用眼睛在看,而是用头脑在看!”<sup>3</sup>

(南京大学哲学系)

1 弗赖登塔尔. 数学教育再探[M]. 刘意竹,等译. 上海:上海教育出版社,1994:166~169.

2 郑毓信. 数学教育与学会思维(《教数学,想数学,学数学》系列之四)[J]. 小学数学教师,2015(6).

3 郑毓信. 理论视角下的小学数学教学——案例三则[J]. 小学教学,2007(7). 本文已被收入郑毓信. 开放的小学数学教学(“郑毓信数学教育论丛”之一)[M]. 南京:江苏教育出版社,2008.