从一道数学试题的命制过程分析数学核心素养的考查方法

王志刚　阮　飞
安徽省阜阳市教研室　236031　安徽省太和中学　236600

[摘　要] 数学评价必将从“能力立意”转变为“素养立意”. 怎样在试题命制过程中渗透数学核心素养,怎样用核心素养的观点分析评价试题是现代教学需要着重思考的问题.

[关键词] 数学核心素养;数学评价;试题命制;能力立意;素养立意

引言

时代变化了,教育的要求变了,呼唤核心素养的出现. “核心素养是新课标的来源,也是确保课程改革万变不离其宗的‘DNA’,考试评价的方式和内容正在悄然地改变,围绕发展学生的核心素养的教育评价体系正在逐步形成,未来三到五年的数学考试评价必将从“能力立意”转变为“素养立意”.

正文

数学核心素养是具有数学基本特征的、适应个人终身发展和社会发展需要的人的关键能力与思维品质. 数学核心素养是数学课程目标的集中体现,是学生在数学学习的过程中逐步形成的. 数学核心素养包括三个方面,六个关键词:用数学的眼光观察世界,发展数学抽象、直观想象素养;用数学的思维分析世界,发展逻辑推理、数学运算素养;用数学的语言表达世界,发展数学建模、数据分析素养. 核心素养很重要,这一点估计没人会反对. 但问题是,很多老师不知道如何去操作落实,这是摆在我们老师面前的现实问题. 林崇德教授给出这样的指导意见:“核心素养具有可教、可学的外显部分,同时也存在无声、无形但可感、可知的内隐部分. 前者能够在特定的情境下通过一定的方式表现出来,因此能够有效地对其进行定量的测评……”基于此,笔者在试题的命制过程中进行了一些尝试.

一、题目名称

导数的几何意义和函数不等式证明问题.

已知函数$f(x)=e^x$,$g(x)=\ln(x+a)$.

(Ⅰ)当$a=2$时,求曲线$y=g(x)$在点$(-1,g(-1))$处的切线方程;

(Ⅱ)当$a\leqslant 2$,$x\in(-a,+\infty)$时,证明:$f(x)>g(x)$;

(Ⅲ)已知$e^{-\frac{4}{7}}-\frac{4}{7}<0$,$e^{-\frac{5}{9}}-\frac{5}{9}>0$,当$\forall x\in(-a,+\infty)$,$f(x)\geqslant g(x)$恒成立时,估计实数$a$最大值的近似值(精确到$0.1$).

二、题目分析

1. 试题的命制思路分析

此题是基于数学情境命制的试题,试题素材来源于教材中导数的几何意义,背景是函数$f(x)=e^x$在$x=0$处和$u(x)=\ln x$在$x=1$处的泰勒展开式.

第(Ⅰ)问直接考查导数的几何意义.由于函数$f(x)=e^x$和$u(x)=\ln x$互为反函数,且$f(x)$在$(0,1)$处的切线m和$u(x)$在$(1,0)$处的切线n平行,把n和$u(x)$向左平移2个单位就得到m和$g(x)=\ln(x+2)$. 因此引入参数a,构造新函数$g(x)=\ln(x+a)$. 控制参数a的取值范围可保证$f(x)>g(x)$,于是抽象出第(Ⅱ)问. 通过几何画板演示发现参数a有最大值,最大值是多少呢?(笔者注:我们猜想这个最大值与欧米伽常数有关)通过探索发现高中知识很难解决这个问题,于是给出相关数据,改为求参数a最大值的近似值.

2. 考查目标分析

本题在较复杂的数学情境下考查函数图像在某一点处的切线与函数导数的关系,即导数的几何意义,考查导数公式和导数运算法则、函数最小值、导数、函数零点的概念,考查考生灵活运用导数工具借助已知数据去分析问题、解决问题的能力,综合考查考生的逻辑推理能力、运算求解能力、推理论证能力以及转化与化归、数形结合的思想.

3. 试题设问及解答过程中涉及的数学核心素养分析

(1)逻辑推理和数学运算素养

逻辑推理是指从一些事实和命题出发,依据逻辑规则推出一个命题的思维过程,主要包括两类:一类是从特殊到一般的推理,推理形式主要有归纳、类比;一类是从一般到特殊的推理,推理形式主要有演绎. 数学运算是指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的过程,主要包括:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算方向,

选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等.

第（Ⅰ）问的设计面向全体考生，要解决这个问题，考生要具备毕业水平的逻辑推理素养：在对曲线切线的概念充分理解的基础上，由分析法知，需要求切点坐标和切线的斜率；还要具备毕业水平的数学运算素养：准确应用导数公式和求导法则进行导数运算就可以求切点坐标和切线的斜率，再写出切线的点斜式方程.

解答过程：（Ⅰ）当$a=2$时，$g(-1)=0$，$g'(-1)=1$，

故曲线$y=g(x)$在点$(-1,g(-1))$处的切线方程为$y=x+1$.

（2）数学建模和直观想象素养

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程，主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，求解结论，验证结果并改进模型，最终解决实际问题. 笔者认为也应包括构造新的数学模型解决数学问题的过程. 直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用图形理解和解决数学问题的过程，主要包括：借助空间认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述、分析数学问题；建立形与数的联系；构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路.

解答（Ⅱ）问时要把$f(x)>g(x)$转化为$h(x)_{\min}>0$，能测试学生高考水平的数学建模素养和数学计算和逻辑推理素养：在求解过程在发现不易判断$h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+a}$的正负号，得不到$h(x)$的单调性，但借助图形可以发现当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时$e^x-\ln(x+a)\geqslant e^x-\ln(x+2)$，借助放缩法把问题转化为证明$e^x-\ln(x+2)>0$. 这就考查了学生的直观想象、数学运算和逻辑推理的素养.

（Ⅱ）的解答过程如下：

令$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\ln(x+a)$.

当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时，$e^x-\ln(x+a)\geqslant e^x-\ln(x+2)$.

要证当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时，$f(x)>g(x)$，

只需证明当$a=2$时，$h(x)>0$.

接下来有三种常规的方法：

解法一：由于方程$h'(x)=0$的根无法求出，利用零点存在定理估值得到：$h'(x)=0$在定义域$(-2,+\infty)$上有唯一实根x_0，且$x_0\in(-1,0)$，再利用指、对数式的互换简化$h(x)$的最小值$h(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0$，由不等式的性质得到结果$h(x_0)=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$. 此法要求考生具有高考水平的数学运算和逻辑推理素养.

当$a=2$时，$h(x)=e^x-\ln(x+2)$，$h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$在$(-2,+\infty)$上单调递增.

又$h'(-1)<0$，$h'(0)>0$，故$h'(x)=0$在定义域$(-2,+\infty)$上有唯一实根x_0，且$x_0\in(-1,0)$.

当$x\in(-1,x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$是减少的；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增加的；所以$h(x_0)$是函数$h(x)=e^x-\ln(x+2)$的最小值.

由$h'(x_0)=0$得$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$，即$\ln(x_0+2)=-x_0$，

故$h(x)\geqslant h(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时，$h(x)>0$，即$f(x)>g(x)$.

解法一的策略和考查点之间的关系以及所需核心素养，可以用图1表示.

解法二：利用数形结合，当$a=2$时，画出函数$f(x)=e^x$、$g(x)=\ln(x+2)$的大致图像和第（Ⅰ）问的直线$y=x+1$，易于发现函数$f(x)=e^x$在点$(0,f(0))$处的切线方程也为$y=x+1$. 此法要求学生具有高考水平的直观想象和逻辑推理素养.

过程如下：

如图2，当$a=2$时，曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程也为$y=x+1$.

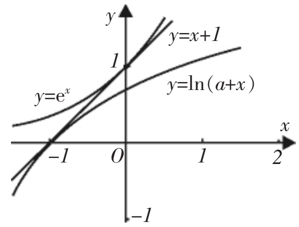

图2

易知当$x\in(-2,+\infty)$时，$f(x)\geqslant x+1\geqslant g(x)$，

又两个等号不能同时成立，所以$f(x)>g(x)$.

综上，当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时，$f(x)>g(x)$.

解法二解题的策略和考查点之间的关系以及所需核心素养，可以用图3表示.

解法三：借助课后习题中的两个重要不等式，简洁自然，其背景为函数$f(x)=e^x$在$x=0$处的展开式：$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$和函数$u(x)=\ln x$在$x=1$处的展开式：

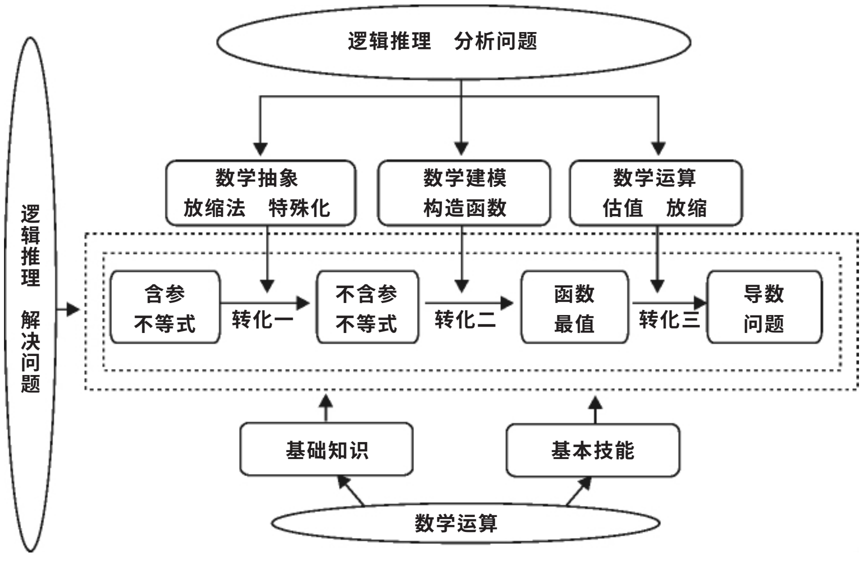

图1　求解第（Ⅱ）问解法一的核心素养

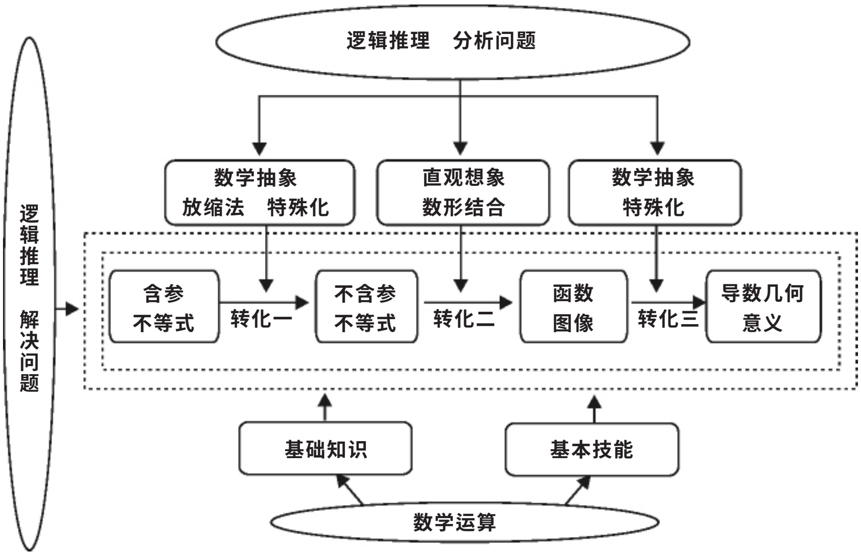

图3　求解第（II）问解法二的核心素养

$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+R_n(x)$. 此解法法要求学生具有高考水平的数学运算和逻辑推理素养.

过程如下：

由$e^x\geqslant x+1$（当且仅当$x=0$时取等号）和$x+1\geqslant\ln(x+2)$（当且仅当$x=-1$时取等号）知：$e^x>\ln(x+2)$.

又当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时，$x+2-(x+a)=2-a\geqslant 0$，即$x+2\geqslant x+a>0$，

结合函数$y=\ln x$为$(0,+\infty)$上的增函数知$\ln(x+2)\geqslant\ln(x+a)$（当$a=2$时取等号），

所以$e^x>\ln(x+a)$，即$f(x)>g(x)$.

(3)数据分析素养

数据分析是指针对研究对象获得相关数据，运用统计方法对数据中的有用信息进行分析和推断，形成知识的过程，主要包括：收集数据，整理数据，提取信息，构建模型对信息进行分析、推断，获得结论.

第（III）问测试学生拓展水平的数学建模素养：先把$f(x)>g(x)$转化为$h(x)_{\min}>0$，后构造函数$u(x)=e^{-x}-x$求实数a最大值的近似值；测试考生拓展水平的数据分析素养：分析数据$e^{-\frac{4}{7}}-\frac{4}{7}<0$，$e^{-\frac{5}{9}}-\frac{5}{9}>0$，得到$u\left(\frac{4}{7}\right)<0$，$u\left(\frac{5}{9}\right)>0$，从而利用两边夹思想估值.

解答过程如下：

解法一：由（II）知，当$a\leqslant 2$，$x\in(-a,+\infty)$时，$f(x)>g(x)$.

当$a\geqslant 3$，$x\in(-a,+\infty)$时，$f(0)=1<g(0)=\ln a$，不符合题意.

当$2<a<3$，$x\in(-a,+\infty)$时，$h(x)=e^x-\ln(x+a)$，$h'(x)=e^x-\frac{1}{x+a}$在$(-a,+\infty)$上单调递增. 又$h'(-1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{a-1}<0$，$h'(0)=1-\frac{1}{a}>0$，

故$h'(x)=0$在定义域$(-a,+\infty)$上有唯一实根x_0，且$x_0\in(-1,0)$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0+a}$，即$\ln(x_0+a)=-x_0$.

当$x\in(-a,x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$是减少的；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增加的；

所以$h(x_0)$是函数$h(x)=e^x-\ln(x+a)$的最小值.

故$h(x)\geqslant h(x_0)=\frac{x_0^2+ax_0+1}{x_0+a}\geqslant 0$，即$x_0^2+ax_0+1\geqslant 0$，即$a\leqslant-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$.

易知$h(x_0)=0$时，a取最大值a_0，此时得$\begin{cases}e^{x_0}=\ln(x_0+a_0),\\ e^{x_0}=\frac{1}{x_0+a_0},\end{cases}$解得$\begin{cases}a_0=-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right),\\ e^{x_0}+x_0=0.\end{cases}$

记增函数$u(x)=e^{-x}-x$，$u(-x_0)=0$，$-x_0\in(0,1)$，

又$u\left(\frac{4}{7}\right)=e^{-\frac{4}{7}}-\frac{4}{7}<0$，$u\left(\frac{5}{9}\right)=e^{-\frac{5}{9}}-\frac{5}{9}>0$，

所以$\frac{5}{9}<-x_0<\frac{4}{7}$，则$2.32<\frac{65}{28}<a_0=-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)<\frac{106}{45}<2.36$，

所以实数a最大值的近似值为2.3.

本问概括的策略和考查点之间的关系以及所需核心素养，可以用图4表示.

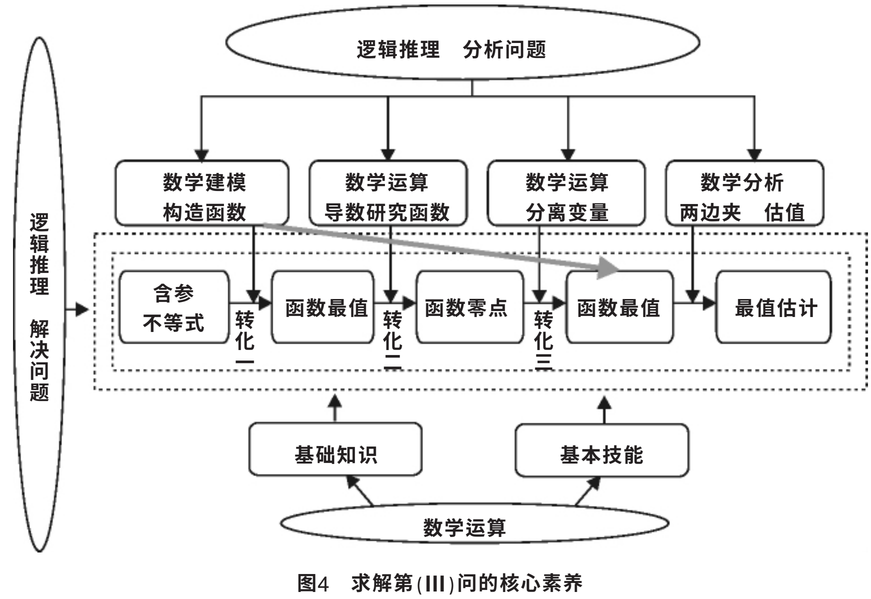

图4　求解第（III）问的核心素养

（下转第12页）

更宽阔的视野去认识古代文明的数学成就.

(3)培养学生的数学建模能力(从具体背景中提炼出数学信息,用数学符号来表示,将实际问题转化为数学问题的能力).数学符号是世界通用的语言.数学符号展现了数学的简洁美.

本节课是一堂公式教学课,在推导公式的过程中,抓住了两个重要思想:从特殊到一般的探究思想,及从一般到特殊的化归思想.从特殊到一般设计了三个问题链:

问题1:$1+2+\cdots 100=?$

问题2:$1+2+3+\cdots+n=?$

问题3:如何求等差数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

一般到特殊的化归思想揭示了本节推导等差数列前项和公式的思想精髓:将“不相同的数求和”化归为“相同数的求和”.这中间,穿插了三段古今中外、不同时空的数学史材料,使得在较好地完成教学目标的同时,丰富了数学课堂.数学教学过程中,课堂气氛异常活跃,学生参与度极高.数学史激发了学生学习数学的兴趣,对学生的人格成长产生了启发作用.不同时空数学思想的对比有利于拓宽学生的视野,培养学生全方位的认知能力和思考弹性,也让学生了解了数学的多元文化的意义.

数学特级教师冯斌老师在评课中肯定了本节课的设计与教学效果.但她同时指出,与另一节同课异构的课相比较,这节课少了点“数学味”.冯老师提出了一点思考:数学文化渗透的适度问题.

数学史融入数学教育是一项大的课题.如何将数学史融入数学教学,主要有两种方法:一是直接法,即历史材料的直接利用.二是注入历史的教学法——发生教学法.简单地说,就是“借鉴历史设计一个话题的教学方法”.本堂课所采用的就是直接利用历史材料.在一节40分钟的课中用什么历史材料,怎么用,用在哪里,用多少时间,使得这节课是既有历史味,又有数学味的数学课,值得我们大力思考和研究.

(上接第8页)

解法二:由(Ⅱ)知,实数a的最大值$a_0\geqslant 2$.

由函数$f(x)$图像是下凸的和函数$g(x)$图像是上凸的,知函数$f(x)$图像在函数$g(x)$图像上方时,恒有$f(x)>g(x)$.

故当两函数图像相切时,$f(x)\geqslant g(x)$恒成立,且实数a取最大值a_0.

设切点为$P(x_0,y_0)$,此时两函数在点P处的切线重合,

则$\begin{cases}f(x_0)=g(x_0),\\ f'(x_0)=g'(x_0),\end{cases}$ 即$\begin{cases}e^{x_0}=\ln(x_0+a_0),\\ e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+a_0},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_0=-\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right),\\ e^{x_0}+x_0=0.\end{cases}$

记函数$u(x)=e^{-x}-x$,则$u(-x_0)=0$.

函数$u(x)$为减函数,且$u(1)<u(-x_0)=0<u(0)$,所以$-x_0\in(0,1)$.

又$u\left(\dfrac{4}{7}\right)=e^{-\frac{4}{7}}-\dfrac{4}{7}<0$,$u\left(\dfrac{5}{9}\right)=e^{-\frac{5}{9}}-\dfrac{5}{9}>0$,

所以$\dfrac{5}{9}<-x_0<\dfrac{4}{7}$,则$2.32<\dfrac{65}{28}<a_0=-\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)<\dfrac{106}{45}<2.36$,

所以实数a最大值的近似值为2.3.

题目拓展

把第(Ⅲ)问改为:当$\forall x\in(-a,+\infty)$,$f(x)\geqslant g(x)$恒成立时,估计实数a最大值的近似值(精确到0.1).

要解答这个问题就需要考生具有拓展水平的数学运算、数学建模和数据分析素养.

解答如下:

先证$e^{-\frac{4}{7}}-\dfrac{4}{7}<0$:

因为$\left(\dfrac{245}{216}\right)^3=\left(1+\dfrac{29}{216}\right)^3<\left(1+\dfrac{30}{220}\right)^3=\left(1+\dfrac{3}{22}\right)^3=1+\dfrac{9}{22}+\dfrac{27}{22\times22}+\dfrac{27}{22\times22\times22}<1+\dfrac{9}{22}+\dfrac{27}{22\times22}+\dfrac{3}{22\times22}=\dfrac{178}{121}<\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}<\dfrac{54}{35}$,

即$\left(\dfrac{245}{216}\right)^3=\left(\dfrac{7\times35}{4\times54}\right)^3<\dfrac{54}{35}$,

所以$\left(\dfrac{7}{4}\right)^3<\dfrac{54}{35}\left(\dfrac{54}{35}\right)^3=\left(\dfrac{27\times4}{7\times10}\right)^4$,

所以$\left(\dfrac{7}{4}\right)^7<\left(\dfrac{27}{10}\right)^4<e^4$,

所以$e^{-\frac{4}{7}}-\dfrac{4}{7}<0$.

再证$e^{-\frac{5}{9}}-\dfrac{5}{9}>0$.

因为$\left(\dfrac{8}{7}\right)^4=\left(1+\dfrac{1}{7}\right)^4=1+C_4^1\dfrac{1}{7}+C_4^2\dfrac{1}{7^2}+C_4^3\dfrac{1}{7^3}+C_4^4\dfrac{1}{7^4}>1+C_4^1\dfrac{1}{7}=\dfrac{11}{7}>\dfrac{14}{9}$,

又$\left(\dfrac{81}{70}\right)^4>\left(\dfrac{8}{7}\right)^4>\dfrac{14}{9}$,

所以$\dfrac{9^8}{70^4}\times9\times\dfrac{14^4}{5^5}>\dfrac{14}{9}\times9\times\dfrac{14^4}{5^5}$,

即$\left(\dfrac{9}{5}\right)^9>\left(\dfrac{14}{5}\right)^5=2.8^5>e^5$,

所以$e^{-\frac{5}{9}}-\dfrac{5}{9}>0$.

下同原题第(Ⅲ)问的解法.

从以上分析可以看出,在解答本题时起决定作用的是逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析五大核心素养.在将新问题转化为旧问题,复杂问题转化为简单问题的过程中,数学核心素养起着重要的作用,而知识和技能只有在具体求解时才能发挥作用.

数学核心素养虽划分为三个方面,六个关键词,但它们既有独立性,又相互交融,形成一个有机整体.用数学的眼光观察世界,即人从外界输入信息;用数学的思维分析世界,即人处理信息;用数学的语言表达世界,即人输出信息.